Universidad de Granada
Departamento de Análisis Matemático
Asignatura: Cálculo
Primer curso de la Licenciatura de Ciencias Matemáticas

Relación de problemas

Números y funciones. Continuidad y límite funcional.

Problema 1. Calcula para qué valores de x se verifica que $\dfrac{2x-3}{x+2} < \dfrac{1}{3}$.

Problema 2. Discute la validez de las relaciones:

1. $|x| - |y| = |x-y|$
2. $|x-5| < |x+1|$

Problema 3. ¿Es cierto que $0 < x+y-xy < 1$ siempre que $0 < x < 1,\ 0 < y < 1$?

Problema 4. Sabiendo que $a+b > c+d,\ a > b,\ c > d$; ¿se verifica necesariamente alguna de las desigualdades: $a > c,\ a > d,\ b > c$ o $b > d$? Dar una prueba o un contraejemplo en cada caso.

Problema 5. Pruébese cada una de las siguientes desigualdades y dígase, en cada caso, cuándo se da la igualdad.

i) $2xy \leqslant x^2 + y^2$.
ii) $4xy \leqslant (x+y)^2$.
iii) $x^2 + xy + y^2 \geqslant 0$.
iv) $(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1) \geqslant 27abc$ donde $a > 0, b > 0, c > 0$.

Sugerencia: para probar i) considérese $(x-y)^2$. Las demás desigualdades pueden deducirse de i).

Problema 6. **(difícil)** Pruébese que: $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{a+b-x} < \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$ siempre que $0 < a < x < b$.

Problema 7. Probar usando inducción:

(a) $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

(b) $1^3+2^3+\cdots+n^3 = (1+2+\cdots+n)^2$

(c) $1+a+a^2+a^3+\cdots+a^n = \dfrac{a^{n+1}-1}{a-1} \qquad a \neq 1$

(d) $\sqrt{n} \leq 1+1/\sqrt{2}+1/\sqrt{3}+\cdots+1/\sqrt{n} \leq 2\sqrt{n}$

Problema 8. Sean A, B conjuntos no vacíos de números reales. Supongamos que $a \leqslant b$ para todo $a \in A$ y para todo $b \in B$. Probar que $\sup A \leqslant \inf B$.

> **Nota:** Para probar desigualdades en las que intervienen supremos o ínfimos las siguientes observaciones, aunque evidentes, pueden ser útiles.
> Sea $C \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío.
> (I) Si queremos probar que un número real x verifica que $\sup(C) \leqslant x$, lo que tenemos que hacer es probar que x es un mayorante de C.
> (II) Si queremos probar que un número real x verifica que $x \leqslant \inf(C)$, lo que tenemos que hacer es probar que x es un minorante de C.

Problema 9. Sean A, B, conjuntos no vacíos y acotados de números reales. Definamos:

$$A - B = \{a - b : a \in A,\ b \in B\};\ \ AB = \{ab : a \in A,\ b \in B\}$$

Pruébese que $\sup(A - B) = \sup A - \inf B$ y, supuesto que $A \subset \mathbb{R}^+$ y $B \subset \mathbb{R}^+$, probar que $\sup(AB) = \sup A \sup B$.

Problema 10. (difícil) Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función creciente. Demostrar que existe $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = x$.

Problema 11. Simplificar las expresiones

1. $\operatorname{senh}^2 x \cos^2 y + \cosh^2 x \operatorname{sen}^2 y$.
2. $\dfrac{\cosh(\log x) + \operatorname{senh}(\log x)}{x}$.

Problema 12. Probar que $\log(x + \sqrt{1+x^2}) + \log(\sqrt{1+x^2} - x) = 0$.

Problema 13. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Supongamos que $a \leq f(x) \leq b$ para todo x en $[a,b]$. Pruébese que hay algún punto $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = c$.

Problema 14. Un corredor recorre 6 kilómetros en 30 minutos. Demuéstrese que en algún momento de su carrera recorre 1 kilómetro en exactamente 5 minutos.

Problema 15. Un reloj averiado marca inicialmente un tiempo t_0. El reloj puede adelantar o atrasar, pero cuenta con exactitud períodos de 12 horas, es decir, pasadas 12 horas el reloj marca un tiempo $t_0 + 12$ horas. Demuéstrese que en algún momento dicho reloj mide con exactitud una hora.

Problema 16. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua verificando que $|f(s) - f(t)| \geq |s - t|$ para todos $s,t \in [0,1]$, y $f(\{0,1\}) = \{0,1\}$. Pruébese que o bien es $f(x) = x$ para todo $x \in [0,1]$, o bien es $f(x) = 1 - x$ para todo $x \in [0,1]$.

Problema 17. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua verificando que $f(a) < 0$, $f(b) < 0$ y $f(c) > 0$ para algún $c \in]a,b[$. Pruébese que existen dos números u, v tales que $a < u < v < b$, $f(u) = f(v) = 0$ y $f(x) > 0$ para todo $x \in]u,v[$.

Problema 18. Justifíquese que una función polinómica de grado par o bien alcanza un máximo en $\mathbb{R}$ o bien alcanza un mínimo absoluto en $\mathbb{R}$.

Problema 19. Demostrar que toda función polinómica de grado impar tiene al menos una raiz real.

Problema 20. Probar que la ecuación $\operatorname{tg}(x) = x$ tiene infinitas soluciones.

Problema 21. Probar que la ecuación

$$x + e^x + \operatorname{arctg} x = 0$$

tiene una sola raíz real. Dar un intervalo de longitud uno en el que se encuentre dicha raíz.

Problema 22. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y decreciente. Pruébese que hay un único punto $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) = a$.

Problema 23.

1. Dar un ejemplo de una función continua cuya imagen no sea un intervalo.
2. Dar un ejemplo de una función definida en un intervalo cuya imagen sea un intervalo y que no sea continua.
3. Dar un ejemplo de una función continua en todo $\mathbb{R}$, no constante y cuya imagen sea un conjunto (obligatoriamente un intervalo) acotado.
4. Dar un ejemplo de una función continua en $[0,1[$ tal que $f([0,1[)$ no sea acotado.
5. Dar un ejemplo de una función continua definida en un intervalo abierto acotado y cuya imagen sea un intervalo cerrado y acotado.
6. ¿Puede existir una función definida en todo $\mathbb{R}$, continua en un punto x, y que no tenga signo constante en ningún intervalo centrado en dicho punto?